

© 2024 г. А.И. ГЛУЩЕНКО, д-р техн. наук (aiglush@ipu.ru),
К.А. ЛАСТОЧКИН (lastconst@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АППРОКСИМАЦИОННЫЙ ПОДХОД К АДАПТИВНОМУ УПРАВЛЕНИЮ ЛИНЕЙНЫМИ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ СИСТЕМАМИ¹

Предлагается адаптивная система управления по вектору состояний классом нестационарных линейных систем. Задача адаптации сведена к задаче идентификации кусочно-постоянных приближений нестационарных параметров идеального сигнала управления. При выполнении условия не исчезающего возбуждения регрессора с достаточно малым периодом обеспечена экспоненциальная сходимость ошибки идентификации приближений и ошибки слежения за эталонной моделью к произвольно малой окрестности положения равновесия. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы математическим моделированием.

Ключевые слова: адаптивное управление, нестационарные параметры, параметрическая ошибка, не исчезающее возбуждение, идентификация.

DOI: 10.31857/S0005231024050039, EDN: YQFACM

1. Введение

Начиная с 1960-х гг. тематика, связанная с адаптивным управлением, остается одной из центральных для лаборатории № 7 ИПУ РАН. Ее основатель, академик Яков Залманович Цыпкин, внес весомый вклад в изучение проблем адаптации и обучения и предложил единый подход к их решению, основанный на методах стохастической аппроксимации. В рамках такого подхода, в частности, были успешно решены задачи идентификации и оценки параметров. В дальнейшем Борисом Теодоровичем Поляком были предложены оптимальные и робастные псевдоградиентные алгоритмы адаптации и строго исследована их скорость сходимости [1, 2]. Эти исследования во многом легли в основу теории адаптивного управления как науки, которая, начав с линейных систем с постоянными параметрами, в дальнейшем постепенно обобщается на более широкие классы объектов. Об одном таком классе и пойдет речь в данной работе.

Одним из предметов теории адаптивного управления является задача слежения нестационарным объектом за стационарной эталонной моделью с нулевой установившейся ошибкой. Несмотря на более чем 65-летнюю историю, сегодня эта задача все еще не имеет универсального практического решения, что мотивирует исследователей по всему миру к разработке новых подходов и инструментариев.

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МД.1787.2022.4).

Стандартные алгоритмы адаптивного управления предназначены для линейных систем с квазипостоянными параметрами. При их применении для управления линейными нестационарными системами, ввиду появления в производной функции Ляпунова некомпенсируемого слагаемого, пропорционального скорости изменения неизвестных параметров, вместо сходимости ошибки слежения к нулю обеспечивается только ее ограниченность в некоторой области с нерегулируемой границей [3, с. 552]. В [4] на основе метода скоростного градиента эти результаты обобщены на задачу слежения нелинейной нестационарной системой за нестационарной эталонной моделью. В [5, 6] предложены различные комбинированные законы адаптации, как утверждается, позволяющие при выполнении условия неисчезающего возбуждения регрессора уменьшить величину установившейся ошибки. В [7] предложен метод *congelation of variables* – *заморозки переменных*, позволяющий с помощью специальной и не всегда подходящей для практики силовой обратной связи демпфировать влияние возмущающего слагаемого, благодаря чему обеспечить асимптотическую сходимость ошибки слежения к нулю. Альтернативный подход [8] также обеспечивает асимптотическую устойчивость, но использует большой коэффициент усиления уже не в законе управления, а в законе адаптации. В методе мажорирующих функций [9, 10] предлагается использовать закон адаптации с большим коэффициентом усиления, но в отличие от [8] гарантируется только диссипативность замкнутой системы. В [11] предложена адаптивная система управления, обеспечивающая экспоненциальную сходимость ошибки слежения к нулю для систем в канонической форме управляемости с нестационарными параметрами, описываемыми известными генераторами с неизвестными начальными условиями. В [12] предложено заменить задачу адаптивного управления нестационарными механическими системами на задачу идентификации кусочно-постоянных параметров полинома, полученного с помощью локального разложения нестационарных параметров системы в ряд Тейлора произвольного порядка. В [13, 14] на базе методов параметрической идентификации развит подход к адаптивно-оптимальному управлению по выходу нестационарными линейными системами в предположении, что параметры объекта являются известными нестационарными функциями времени.

Недостатки описанных выше и других известных подходов к решению задач адаптивного управления нестационарными системами могут быть классифицированы следующим образом:

- 1) использование силовых обратных связей в законе управления или настройки (разрывных управлений, больших коэффициентов, нелинейных демпфирующих сигналов и пр.) [7–10, 12];
- 2) необходимость удовлетворения условий параметрической идентифицируемости [5, 6, 11, 13, 14];
- 3) увеличение размерности решаемой задачи идентификации/адаптации путем учета коэффициентов физических законов изменения параметров системы или аппроксимационных полиномов [11–14].

Более полное представление о текущем состоянии проблемы адаптивного управления нестационарными системами возможно составить из постановочных частей цитируемых работ [4–15]. В этой же работе предлагается новый метод аппроксимационного адаптивного управления нестационарными системами на основе теории параметрической идентификации.

Мотивация заключается в исследовании условий применимости недавно предложенного [16] алгоритма идентификации нестационарных параметров линейного регрессионного уравнения в задаче управления нестационарной линейной системой. В соответствии с подходом [16] задача идентификации нестационарных параметров сводится к задаче идентификации их кусочно-постоянной аппроксимации. Как следует из теоретических выводов [16], в отличие от многих существующих методов идентификации нестационарных параметров, алгоритм [16] позволяет гарантировать сходимость ошибки идентификации нестационарных параметров в область, которая при исчезающем возбуждении регрессора с достаточно малым периодом T_s может быть произвольно уменьшена путем уменьшения длины интервала разложения в ряд Тейлора. В данной работе этот подход предлагается использовать при управлении классом линейных систем с нестационарными параметрами. Для этого:

- 1) предложен неадаптивный закон управления нестационарной системой, коэффициенты обратных и прямых связей которого вычисляются исключительно по первому (кусочно-постоянному) приближению нестационарных параметров системы;
- 2) сформулированы условия сходимости ошибки слежения в произвольно малую окрестность нуля при применении закона управления из 1);
- 3) на основе результатов [16] предложен закон идентификации параметров управления из 1), позволяющий при исчезающем возбуждении регрессора с достаточно малым периодом гарантировать сходимость ошибки слежения в произвольно малую окрестность нуля.

Полученный в результате аппроксимационный подход к адаптивному управлению нестационарными системами из цитируемой литературы наиболее близок к решению [12]. Однако в отличие от него, во-первых, нестационарные параметры аппроксимируются только первым слагаемым из ряда Тейлора, что снижает вычислительную сложность и не увеличивает размерность задачи идентификации [16], а во-вторых, этап интерполяции полученных оценок не используется. В сравнении с другими существующими решениями [4–14] предложенный алгоритм адаптивного управления нестационарными линейными системами характеризуется следующими достоинствами (+) и недостатками (-):

- (+) силовые и демпфирующие обратные связи в законах управления и адаптации не используются;
- (+) знание функций изменения параметров системы не требуется;
- (+) априорная информация о параметрах системы не используется;

- (–) для достижения даже асимптотической сходимости ошибки слежения к окрестности нуля требуется выполнение условия неисчезающего возбуждения регрессора;
- (–) значение установившейся ошибки слежения может быть уменьшено только при достаточно малом периоде T_s неисчезающего возбуждения регрессора;
- (–) невыполнение условия параметрической идентифицируемости (неисчезающего возбуждения регрессора) может привести к неустойчивости замкнутой системы.

В целом предлагаемое решение хоть и не устраняет все недостатки существующих подходов, но расширяет набор методов адаптивного управления нестационарными системами, а поэтому, по мнению авторов, представляет интерес.

Основные определения

В работе приняты следующие соглашения: запись $f(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ означает значение функции $f: [t_0^+, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ в момент времени t , где $t_0^+ \geq 0$ начальный момент времени; для вектора $a \in \mathbb{R}^n$ запись $\|a\|$ обозначает евклидову норму; минимальное и максимальное собственное число матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ обозначается соответственно $\lambda_{\min}(A)$ и $\lambda_{\max}(A)$. Для обозначения экспоненциальной скорости сходимости используется латинская аббревиатура *exp*.

При доказательстве теорем и утверждений будет использовано определение конечного и неисчезающего (постоянного) возбуждения.

Определение 1. Сигнал $\omega(t) \in \mathbb{R}^n$ возбужден на конечном отрезке $[t_1, t_2] \subset [t_0^+, \infty)$, если существует $\alpha > 0$, такое, что верно неравенство

$$(1.1) \quad \int_{t_1}^{t_2} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq \alpha I_n.$$

Определение 2. Сигнал $\omega(t) \in \mathbb{R}^n$ возбуждается постоянно, если для всех $t \geq t_0^+ \geq 0$ существует $T_s > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что верно неравенство

$$(1.2) \quad \int_t^{t+T_s} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq \alpha I_n.$$

Множества сигналов для которых выполняются условия (1.1) или (1.2) обозначим FE и PE соответственно. Будем называть сигнал $\omega(t)$ постоянно возбужденным, если $\omega \in PE$, и возбужденным на конечном отрезке времени, если $\omega \in FE$.

В основном результате работы используется формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Условия существования этой формулы определены в следующей лемме [17].

Лемма 1. Пусть $f(t) \in \mathbb{R}$ имеет непрерывную производную порядка p на интервале (t_1, t_2) , тогда для любой пары точек t и a из (t_1, t_2) верно

$$(1.3) \quad f(t) = f(a) + \frac{t-a}{1!} f^{(1)}(a) + \dots + \frac{(t-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + \int_a^t \frac{(t-\zeta)^p}{p!} f^{(p+1)}(\zeta) d\zeta.$$

2. Постановка задачи

Рассмотрим непрерывные линейные системы с нестационарными параметрами

$$(2.1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) = A_0x(t) + e_n (a^T(t)x(t) + b(t)u(t)) = A_0x(t) + e_n \Phi^T(t) \Theta(t), \quad x(t_0^+) = x_0,$$

где

$$A(t) = A_0 + e_n a^T(t), \quad B(t) = e_n b(t),$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} & I_{n-1} \\ 0_{1 \times n} & \end{bmatrix}, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi^T(t) = [x^T(t) \quad u(t)],$$

$$\Theta(t) = [a^T(t) \quad b(t)]^T,$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояния с неизвестными начальными условиями x_0 , $u(t) \in \mathbb{R}$ – управляющее воздействие, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – неизвестная матрица системы, $B(t) \in \mathbb{R}^n$, $\Theta(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ – неизвестные векторы, $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица Фробениуса, $e_n \in \mathbb{R}^n$ – координатный вектор с единицей на n -ой позиции. Пара $(A(t), B(t))$ полностью управляема для всех $t \geq t_0^+$. Проверка управляемости системы (2.1) может быть выполнена, например, с помощью критерия, приведенного в [18].

Характерной особенностью класса систем (2.1) является действие управления и неопределенности на одно уравнение. Такие системы называются системами с согласованной неопределенностью и часто встречаются на практике. Например, уравнения динамики углов Эйлера твердого тела при допущении его симметричности описываются звеном второго порядка с согласованной неопределенностью. Другим хорошим примером задачи управления при согласованных неопределенностях является регулирование координат манипулятора в формализме Эйлера–Лагранжа.

Относительно неизвестных параметров $\Theta(t)$ принимается следующее допущение.

Допущение 1. Параметры $\Theta(t)$ и их первая и вторая производные непрерывны и ограничены

$$\|\Theta(t)\| \leq \Theta_{\max}, \quad \|\dot{\Theta}(t)\| \leq \dot{\Theta}_{\max}, \quad \|\ddot{\Theta}(t)\| \leq \ddot{\Theta}_{\max},$$

где оценки сверху Θ_{\max} , $\dot{\Theta}_{\max}$ и $\ddot{\Theta}_{\max}$ существуют, но неизвестны.

Требуемое качество управления в замкнутой управлением $u(t)$ системе (2.1) зададим эталонной моделью с постоянными параметрами

$$(2.2) \quad \dot{x}_{ref}(t) = A_0 x_{ref}(t) + e_n (b_{ref} r(t) + a_{ref}^T x_{ref}(t)), \quad x_{ref}(t_0^+) = x_{0ref},$$

где $x_{ref}(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор координат состояния эталонной модели с известными начальными условиями x_{0ref} , $r(t) \in \mathbb{R}$ – сигнал задания, $A_{ref} = A_0 + e_n a_{ref}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – гурвицева матрица состояний эталонной модели, b_{ref} – коэффициент усиления эталонной модели.

Предположим, что эталонная модель (2.2) выбрана так, что выполняются условия идеального отслеживания системой (2.1) вектора состояний (2.2).

Допущение 2. Существуют параметры $k_x(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ и $k_r(t) \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнениям

$$a_{ref}^T - a^T(t) = b(t) k_x(t), \quad b_{ref} = b(t) k_r(t).$$

Принятое допущение необходимо и достаточно для существования сигнала управления $u(t)$, доставляющего для всех $t \geq t_0^+$ совпадение уравнений системы (2.1) с уравнениями выбранной эталонной модели (2.2). Выполнение допущения обеспечивается выбором эталонной модели в виде (2.2), рассмотрением класса систем с постоянным знаком коэффициента усиления $b(t)$ и полностью управляемой парой $(A(t), B(t))$. Заметим что допущение 2 накладывает на систему (2.1) ограничение $\text{sgn}(b(t)) = \text{const}^2$, а значит совместно допущения 1 и 2 требуют двухсторонней ограниченности $b_{\max} \geq |b(t)| \geq b_{\min} > 0$.

Необходимо построить адаптивный закон управления $u(t)$, гарантирующий при $\Phi \in \text{PE}$ экспоненциальную сходимость (exp) ошибки $e_{ref}(t) = x(t) - x_{ref}(t)$ в целевое множество

$$(2.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{ref}(t)\| \leq \Delta_{e_{ref}} \text{ (exp)},$$

таким образом, что существует некоторый параметр процедуры адаптивного управления, от выбора значения которого зависит установившаяся ошибка $\Delta_{e_{ref}} > 0$.

3. Предварительные результаты и преобразования

Недавно было получено эффективное решение [19] задачи управления линейными системами с неизвестными кусочно-постоянными параметрами. В этом разделе преобразуем задачу адаптивного управления системой (2.1) с нестационарными параметрами к задаче управления системой с кусочно-постоянными параметрами. С этой целью сначала покажем достижимость поставленной цели (2.3) с помощью неадаптивного закона управления с известными идеальными параметрами, использующего в цепях обратных/прямых

² Иначе существует момент времени $t_a \geq t_0^+$, в который $b(t_a) = 0$, а уравнения из допущения 2 в общем случае ($b_{ref} \neq 0$, $a_{ref} - a(t_a) \neq 0_n$) не имеют решения.

связей только кусочно-постоянные приближения нестационарных параметров системы (2.1).

С учетом допущения 1, уравнение в отклонениях между уравнением объекта (2.1) и эталонной модели (2.2) принимает вид

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{e}_{ref}(t) &= A_{ref} e_{ref}(t) + e_n b(t) [u(t) - k_x(t) x(t) - k_r(t) r(t)] = \\ &= A_{ref} e_{ref}(t) + e_n b(t) [u(t) - \mathcal{K}^T(t) \omega(t)], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} e_{ref}(t) &= x(t) - x_{ref}(t), \quad \omega(t) = [x^T(t) \quad r^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ \mathcal{K}(t) &= [k_x(t) \quad k_r(t)]^T \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 1}. \end{aligned}$$

Представим возмущение $\mathcal{K}^T(t) \omega(t)$ в виде суммы двух слагаемых: с кусочно-постоянными и с нестационарными параметрами. Для этого зададим возрастающую последовательность

$$t_i^+ = T \left\lfloor \frac{t - t_0^+}{T} \right\rfloor, \quad i \in \mathbb{N},$$

где $t_{i+1}^+ - t_i^+ = T > 0$, $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ – функция округления до ближайшего меньшего целого.

Поскольку по допущениям 1 и 2 параметры $\mathcal{K}(t)$ дифференцируемы, то в T окрестности момента времени t_i^+ по формуле Тейлора (1.3) имеем право записать

$$(3.2) \quad \mathcal{K}(t) = \underbrace{\mathcal{K}(t_i^+)}_{\delta_{\mathcal{K}0}(t)} + \int_{t_i^+}^t \dot{\mathcal{K}}(\zeta) d\zeta,$$

где $\mathcal{K}(t_i^+) = \mathcal{K}_i$ – значение параметров $\mathcal{K}(t)$ в момент времени t_i^+ , $\|\delta_{\mathcal{K}0}(t)\| \leq \dot{\mathcal{K}}_{\max} T$ – остаточный член нулевого порядка ($p = 0$, см. (1.3)).

В соответствии с выражением (3.2) на каждом промежутке $[t_i^+, t_i^+ + T)$ нестационарные параметры $\mathcal{K}(t)$ могут быть аппроксимированы их значением \mathcal{K}_i в начале промежутка. Тогда последовательностью этих значений $\{\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_i\}$ вместе с последовательностью моментов времени переключений между ними $\{t_0^+, t_1^+, \dots, t_i^+\}$ задается кусочно-постоянный сигнал, являющийся для всех $t \geq t_0^+$ первым приближением нестационарных параметров $\mathcal{K}(t)$

$$(3.3) \quad \theta(t) = \mathcal{K}_i = \mathcal{K}_0 + \sum_{q=1}^i \Delta_q^\theta h(t - t_q^+),$$

где $\Delta_q^\theta = \mathcal{K}_q - \mathcal{K}_{q-1}$ – величина изменения параметров $\mathcal{K}(t)$ за отрезок $[t_i^+, t_{i+1}^+]$, $h : [t_0^+, \infty) \rightarrow \{0, 1\}$ – функция Хевисайда.

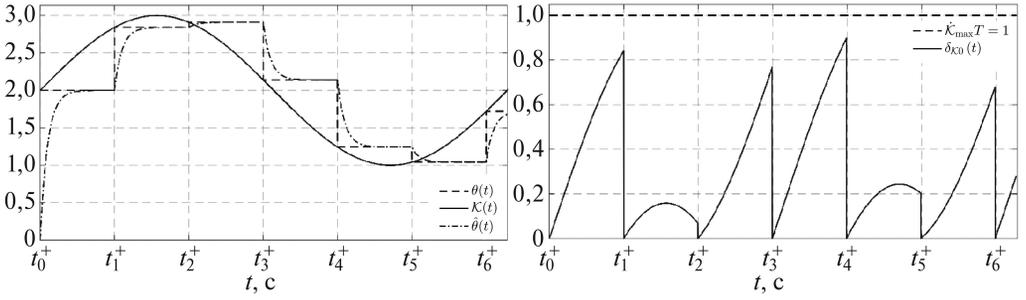


Рис. 1. Графическая иллюстрация взаимосвязи между $\mathcal{K}(t)$, $\theta(t)$ и $\hat{\theta}(t)$.

Выражение (3.3) позволяет уже для всех $t \geq t_0^+$ записать нестационарные параметры в виде суммы $\mathcal{K}(t) = \theta(t) + \delta_{\mathcal{K}0}(t)$, что приводит к искомому представлению возмущения

$$(3.4) \quad \dot{e}_{ref}(t) = A_{ref} e_{ref}(t) + e_n b(t) [u(t) - \theta^T(t) \omega(t) - \delta_{\mathcal{K}0}^T(t) \omega(t)].$$

Выражение (3.4) мотивирует рассмотрение технически реализуемого непрерывного и неадаптивного закона управления

$$(3.5a) \quad u(t) = \hat{\theta}^T(t) \omega(t),$$

$$(3.5b) \quad \dot{\hat{\theta}}(t) = -\gamma_1 (\hat{\theta}(t) - \theta(t)) = -\gamma_1 \tilde{\theta}(t), \quad \hat{\theta}(t_0^+) = \hat{\theta}_0,$$

где $\hat{\theta}(t)$ результат фильтрации параметров $\theta(t)$, а $\gamma_1 > 0$ параметр фильтра.

Для частного случая $\mathcal{K}(t) = \sin(t) + 2$ и $T = 1$ взаимосвязь между параметрами $\mathcal{K}(t)$, $\theta(t)$ и $\hat{\theta}(t)$ поясняется на рис. 1,а и рис. 1,б. На рис. 1,б для этого примера также приведена ошибка аппроксимации $\delta_{\mathcal{K}0}(t)$ и оценка сверху на нее $\dot{\mathcal{K}}_{\max} T = 1$.

Условия достижения цели при использовании закона (3.5a) + (3.5b) описем в следующем утверждении.

Утверждение 1. При выполнении условия $i \leq i_{\max} < \infty$ найдется $T_{\min} > 0$, такое, что для всех $0 < T < T_{\min}$ закон управления (3.5) гарантирует достижение поставленной цели (2.3).

Доказательство Утверждения приведено в Приложении.

В соответствии с утверждением 1, при решении поставленной задачи (2.3) для расчета параметров закона управления (3.5a) достаточно использовать кусочно-постоянные приближения $\theta(t)$ нестационарных параметров возмущения $\mathcal{K}^T(t) \omega(t)$. Поэтому задача адаптивного управления классом систем с неизвестными нестационарными параметрами (2.1) сводится к задаче идентификации неизвестных кусочно-постоянных параметров $\theta(t)$. Для решения этой задачи естественно основываться совместно на подходах, ранее развитых в [16, 19].

Замечание 1. Условие $i \leq i_{\max} < \infty$ необходимо для формального доказательства утверждения 1 и не является ограничительным для практических задач.

4. Основной результат

Следуя методу адаптивного управления с гарантией экспоненциальной устойчивости системами с кусочно-постоянными параметрами [19], для косвенной реализации (3.5) сначала получим регрессионное уравнение, связывающее параметры $\theta(t)$ с сигналами, вычисляемыми на основе измеряемого вектора $\Phi(t)$. Результат такой параметризации оформим в виде утверждения.

Утверждение 2. На основании состояний устойчивого фильтра ($l > 0$) с реинициализацией состояний в момент времени t_i^+

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{\Phi}}(t) &= -l\bar{\Phi}(t) + \Lambda^T(t, t_i^+) \Phi(t), \quad \bar{\Phi}(t_i^+) = 0_{2(n+1)}, \\ \Lambda(t, t_i^+) &= [I_{n+1} \quad (t - t_i^+) I_{n+1}] \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 2(n+1)}, \end{aligned}$$

процедуры нормализации

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \bar{z}_n(t) &= n_s(t) e_n^T [x(t) - l\bar{x}(t) - A_0\bar{x}(t)], \\ \bar{\varphi}_n^T(t) &= n_s(t) \bar{\varphi}(t) = n_s(t) \left[\bar{\Phi}^T(t) \quad e^{-l(t-t_i^+)} \right], \\ n_s(t) &= \frac{1}{1 + \bar{\varphi}^T(t) \bar{\varphi}(t)}, \quad \bar{x}(t) = [I_{n \times n} \quad 0_{n \times (n+2)}] \bar{\Phi}(t), \end{aligned}$$

расширения ($\sigma > 0$)

$$(4.3a) \quad \dot{z}(t) = e^{-\sigma(t-t_i^+)} \bar{\varphi}_n(t) \bar{z}_n^T(t), \quad z(t_i^+) = 0_{2n+3},$$

$$(4.3b) \quad \dot{\varphi}(t) = e^{-\sigma(t-t_i^+)} \bar{\varphi}_n(t) \bar{\varphi}_n^T(t), \quad \varphi(t_i^+) = 0_{(2n+3) \times (2n+3)},$$

смешивания

$$(4.4) \quad Y(t) := \text{adj} \{ \varphi(t) \} z(t), \quad \Delta(t) := \det \{ \varphi(t) \},$$

исключения

$$(4.5) \quad \begin{aligned} z_a(t) &= Y^T(t) \mathfrak{L}_a, \quad z_b(t) = Y^T(t) \mathfrak{L}_b, \\ \mathfrak{L}_a &= [I_{n \times n} \quad 0_{n \times (n+3)}]^T \in \mathbb{R}^{(2n+3) \times n}, \quad \mathfrak{L}_b = [0_{1 \times n} \quad 1 \quad 0_{1 \times (n+2)}]^T \in \mathbb{R}^{(2n+3) \times 1}, \end{aligned}$$

подстановки

$$(4.6) \quad \mathcal{Y}(t) := [\Delta(t) a_{ref}^T - z_a(t) \quad \Delta(t) b_{ref}]^T, \quad \mathcal{M}(t) := z_b(t),$$

и сглаживания ($k > 0$)

$$(4.7a) \quad \dot{\Upsilon}(t) = -k(\Upsilon(t) - \mathcal{Y}(t)), \quad \Upsilon(t_0^+) = 0_{n+1},$$

$$(4.7b) \quad \dot{\Omega}(t) = -k(\Omega(t) - \mathcal{M}(t)), \quad \Omega(t_0^+) = 0,$$

имеем возмущенное регрессионное уравнение

$$(4.8) \quad \Upsilon(t) = \Omega(t)\theta(t) + w(t),$$

где сигналы $\Upsilon(t)$, $\Omega(t)$ вычисляются по $\Phi(t)$ и дополнительно верно:

- а) если $\Phi \in \text{PE} \Rightarrow \bar{\varphi}_n \in \text{PE}$ с периодом $T_s < T$, то найдется $T_{\min} > 0$, такое, что для всех $0 < T < T_{\min}$ и $t \geq t_0^+ + T_s$ верно

$$0 < \Omega_{\text{LB}} \leq \Omega(t) \leq \Omega_{\text{UB}}.$$

- б) если $i \leq i_{\max} < \infty$, то для всех $t \geq t_0^+ + T_s$ верно

$$\|w(t)\| \leq w_{1\max} e^{-\gamma(t-t_0^+-T_s)} + w_{2\max}(T),$$

$$\lim_{T \rightarrow 0} w_{2\max}(T) = 0.$$

Доказательство утверждения и определение $w(t)$ приведены в Приложении.

Параметризация (4.1)–(4.8) использует процедуры, предложенные при решении задачи адаптивного управления системами с кусочно-постоянными параметрами [19]. Отличие заключается в использовании нестационарной матрицы $\Lambda(t, t_i^+)$ в (4.1) и реинициализация состояний фильтров (4.1) и (4.3) в известные, а не алгоритмически детектируемые моменты времени.

Кратко поясним назначение используемых процедур. Применение фильтра (4.1) позволяет по измеряемым сигналам $\Phi(t)$ получить регрессионное уравнение с измеряемыми регрессором и выходом относительно параметров $\bar{\vartheta}(t) = [\Theta_i^T \quad \dot{\Theta}_i^T \quad e_n^T x(t_i^+)]^T$, где $\Theta(t_i^+) = \Theta_i$, $\dot{\Theta}(t_i^+) = \dot{\Theta}_i$ – это значения параметров системы $\Theta(t)$ и скорости их изменения в момент времени t_i^+ . Нормализация (4.2) обеспечивает принадлежность пространству L_∞ всех используемых в дальнейших процедурах сигналов. Процедуры расширения и смешивания (4.3), (4.4) позволяют преобразовать векторный регрессор $\bar{\varphi}_n(t) \in \mathbb{R}^{2n+3}$ в скалярный $\Delta(t) \in \mathbb{R}$. Исключение (4.5), в силу $\Delta(t) \in \mathbb{R}$, реализует переход к отдельному рассмотрению регрессионных уравнений относительно параметров кусочно-постоянной аппроксимации параметров $a(t)$ и $b(t)$. С помощью подстановки (4.6) выражений (4.5) в условие согласованности (см. допущение 2) выполняется переход от уравнений относительно аппроксимаций параметров системы к уравнениям относительно аппроксимаций $\theta(t)$ параметров возмущения. Сглаживание (4.7а), (4.7б) позволяет обеспечить достаточную гладкость сигналов $\Upsilon(t)$ и $\Omega(t)$.

Имея в распоряжении регрессионное уравнение (4.8), вычисленное исключительно по измеряемым сигналам $\Phi(t)$, можно косвенно реализовать закон (3.5) и гарантировать достижение поставленной цели (2.3).

Теорема 1. Пусть $\Phi \in \text{PE} \Rightarrow \bar{\varphi}_n \in \text{PE}$ с периодом $T_s < T$, выполнены допущения 1–2, тогда найдется $T_{\min} > 0$, такое, что для всех $0 < T < T_{\min}$

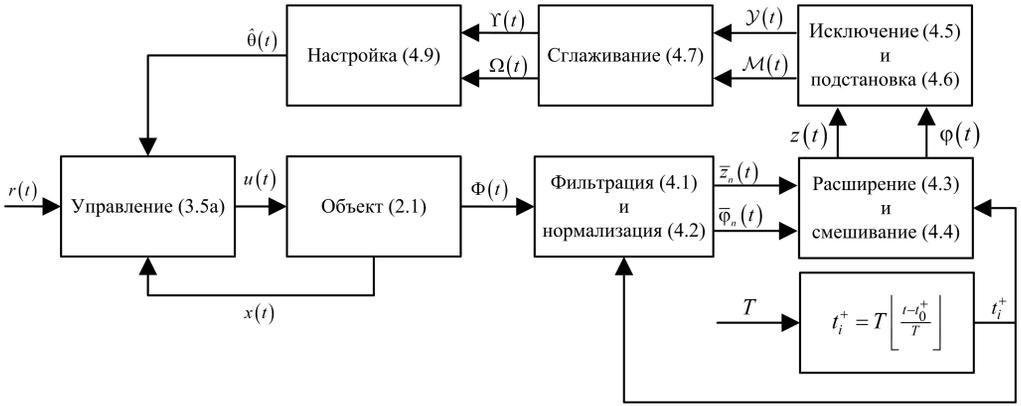


Рис. 2. Структурная схема разработанной адаптивной системы.

закон управления (3.5а) с законом настройки

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\theta}}(t) &= -\gamma(t) \Omega(t) \left(\Omega(t) \hat{\theta}(t) - \Upsilon(t) \right) = \\
 &= -\gamma(t) \Omega^2(t) \tilde{\theta}(t) + \gamma(t) \Omega(t) w(t), \quad \hat{\theta}(t_0^+) = \hat{\theta}_0, \\
 \gamma(t) &= \begin{cases} 0, & \text{если } \Omega(t) < \rho \in (0, \Omega_{\text{LB}}], \\ \frac{\gamma_1}{\Omega^2(t)} & \text{иначе,} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

при $i \leq i_{\max} < \infty$ для $\xi(t) = \left[e_{ref}^T(t) \text{vec}^T(\tilde{\theta}(t)) \right]^T$ гарантирует:

- 1) $\forall t \geq t_0^+ \quad \xi(t) \in L_\infty,$
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi(t)\| \leq \Delta_\xi(T) \quad (\exp) \lim_{T \rightarrow 0} \Delta_\xi(T) = 0.$

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Структурная схема полученного алгоритма адаптивного управления системами с нестационарными неизвестными параметрами (2.1) представлена на рис. 2.

Таким образом, разработанная система управления состоит из закона управления (3.5а), закона адаптации (4.9), набора процедур (4.1)–(4.7) обработки измеряемых сигналов. В отличие от существующих методов адаптивного управления [4–14] предложенный подход не требует какой-либо априорной информации о параметрах системы $a(t)$ и $b(t)$, не использует управление с сильной обратной связью или большой коэффициент усиления закона идентификации, гарантирует глобальную экспоненциальную сходимость ошибки $\xi(t)$ к регулируемой с помощью параметра T ограниченной окрестности положения равновесия.

Замечание 2. Особенностью предложенного решения является взаимосвязь установившейся ошибки $\Delta_\xi(T)$, длины интервала разложения в ряд Тейлора T и периода постоянного возбуждения регрессора T_s . Проблема состоит в невозможности уменьшения параметра T меньше величины перио-

да возбуждения регрессора T_s . Однако при фиксированном периоде T_s и минимально возможном $T < T_{\min}$, таком что $T - T_s > 0$, ошибка $\xi(t)$ может быть ограничена в неприемлемо большой окрестности положения равновесия $\Delta_\xi(T)$. Поэтому для уменьшения установившейся ошибки требуется прежде всего обеспечить постоянное возбуждение регрессора с достаточно малым периодом T_s , что на практике может быть достигнуто с помощью внесения в задание $r(t)$ высокочастотного или случайного тестового сигнала.

5. Численное моделирование

В среде Matlab/Simulink выполним моделирование предложенной адаптивной системы. Численное интегрирование будем проводить явным методом Эйлера с постоянным шагом дискретизации $\tau_s = 10^{-3}$ с.

Рассмотрим систему (2.1) при $n = 2$. Начальные условия, параметры системы и эталонной модели (2.2) зададим выражением

$$(5.1) \quad \begin{aligned} x_0 &= [-1 \ 1]^T, \quad b(t) = 3 + \cos(0,4t) \sin(0,1t), \quad a_{ref}^T(t) = [-8 \ -4], \\ a^T(t) &= \left[2 + \sin(0,1t) \quad 1 + 5 \left(1 - e^{-\frac{1}{25}t} \right) \right], \quad b_{ref} = 8. \end{aligned}$$

Сперва удостоверимся в предварительных выводах, сделанных в утверждении 1. Установим $\gamma_1 = 50$ в качестве постоянной фильтра (3.5b), а задание определим как $r(t) = 10$. На рис. 3 приведено сравнение ошибки $e_{1ref}(t)$ при различных T .

Полученные результаты подтверждают выводы, сделанные в утверждении 1. Действительно, уменьшение T приводит к уменьшению установивше-

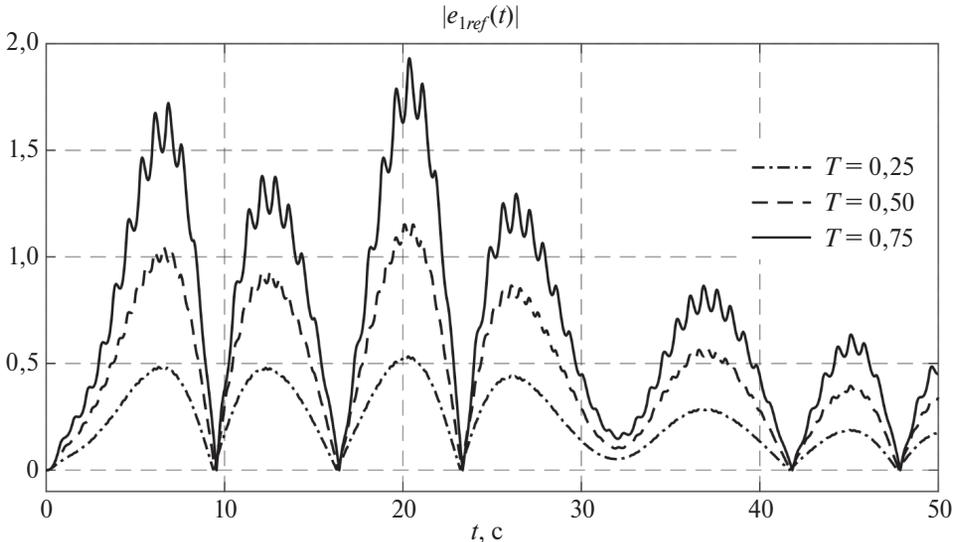


Рис. 3. Переходные процессы по $|e_{1ref}(t)|$ при различных T .

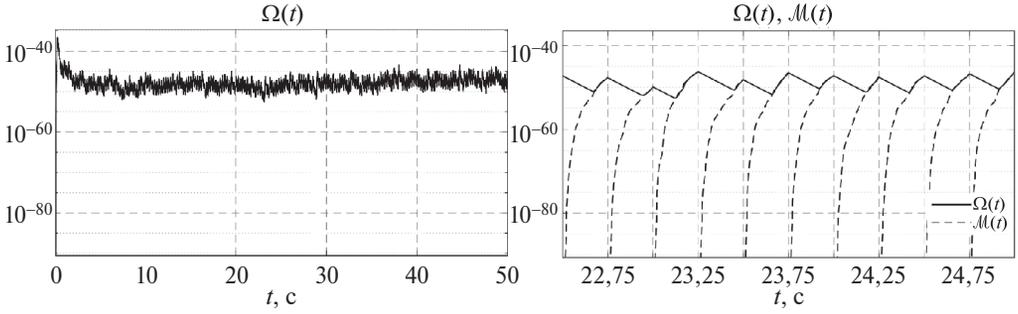


Рис. 4. Переходные процессы по регрессорам $\mathcal{M}(t)$ и $\Omega(t)$.

гося значения ошибки слежения $e_{ref}(t)$ при использовании закона управления (3.5a) с (3.5b). Удостоверившись в справедливости результатов утверждения 1, перейдем к проверке основного результата.

Параметры фильтров (4.1), (4.3), (4.7) и закона настройки (4.9) установим в соответствии с выражением

$$l = 10, \quad \sigma = \frac{0,05}{T}, \quad k = 50, \quad \rho = 10^{-72}, \quad \gamma_1 = 100, \quad T = 0,25,$$

а задание зададим согласно $r(t) = 1 + r_d(t)$ при $r_d(t) \sim \mathcal{N}(0, 10^{-2})$. Случайный сигнал $r_d(t)$ добавлен к постоянному единичному заданию с целью выполнения в замкнутой системе (3.1) условия $\bar{\varphi}_n \in \text{PE}$.

На рис. 4 в логарифмическом масштабе приведены переходные процессы по регрессорам $\mathcal{M}(t)$ и $\Omega(t)$.

Из полученных графиков следует, что несмотря на реинициализацию каждые T секунд состояний фильтров (4.1) и (4.3), регрессор $\Omega(t)$ (в отличие от $\mathcal{M}(t)$) глобально отделен от нуля, начиная с некоторого момента времени, что подтверждает теоретические выводы, сделанные в части (а) утверждения 2. Рисунок 4 демонстрирует значение процедуры сглаживания (4.7), которая, как видно, позволяет, во-первых, усреднить значения регрессора $\mathcal{M}(t)$ на периоде T , а во-вторых, устранить разрывы, вызванные реинициализацией фильтров (4.1) и (4.3).

На рис. 5 приведены переходные процессы по а) состояниям $x(t)$ при применении закона управления (3.5a) с (3.5b) и с (4.9), б) оценкам $\hat{\theta}_i(t)$ и смещенным для наглядности истинным параметрам $\theta_i(t) + 1$, в) управлению (3.5a) с (4.9).

На рис. 6 приведено сравнение интегральных критериев качества ошибки слежения $e_{ref}(t)$ и параметрической ошибки $\tilde{\theta}(t)$ при различных значениях T .

Результаты моделирования иллюстрируют выводы, сделанные в утверждениях 1, 2 и теореме. Поставленная цель (2.3) выполнена, а установившиеся значения ошибок $e_{ref}(t)$ и $\tilde{\theta}(t)$ прямо-пропорциональны параметру T .

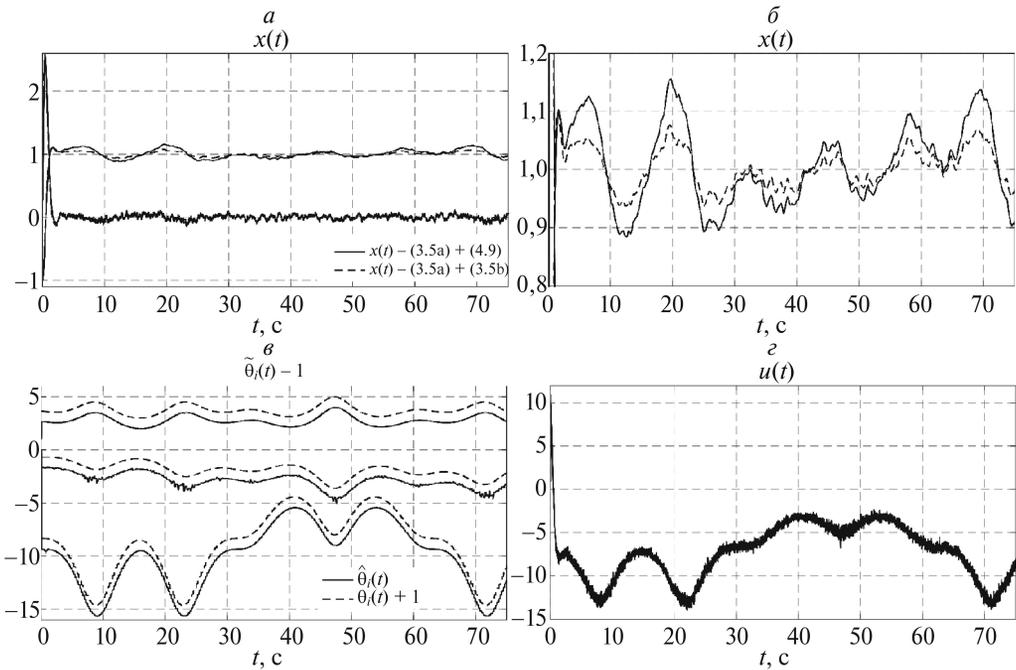


Рис. 5. Переходные процессы по (а)–(б) состояниям $x(t)$ при применении закона управления (3.5а) с (3.5б) и с (4.9), (в) оценкам $\hat{\theta}_i(t)$ и смещенным для наглядности истинным параметрам $\theta_i(t) + 1$, (г) управлению (3.5а) с (4.9).

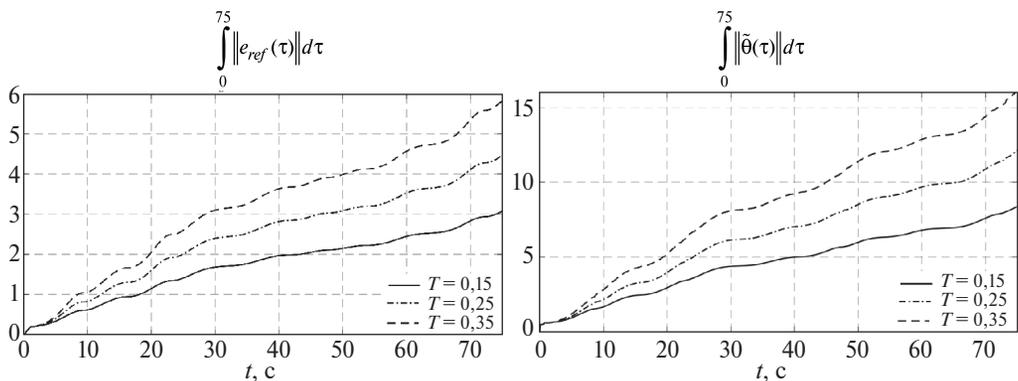


Рис. 6. Сравнение интегральных критериев качества.

6. Заключение

В работе получено решение задачи слежения линейной нестационарной системой за линейной стационарной эталонной моделью. Предложено аппроксимировать неизвестные нестационарные параметры идеального закона управления кусочно-постоянными параметрами. Для идентификации этих кусочно-постоянных параметров объединены методы параметрической иден-

тификации, развитые в [16, 19]. Полученная в результате система адаптивного управления для достижения цели регулирования требует неисчезающего возбуждения регрессора с достаточно малым периодом, но при этом не требует априорной информации о неизвестных параметрах системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Доказательство утверждения разделим на два шага. На первом шаге проанализируем свойства параметрической ошибки $\tilde{\theta}(t)$, а на втором – свойства ошибки слежения $e_{ref}(t)$.

Шаг 1. По доказанному в утверждении 1 из [19] при выполнении условия $i \leq i_{\max} < \infty$ для решения дифференциального уравнения

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\gamma_1 \tilde{\theta}(t) - \dot{\theta}(t), \quad \tilde{\theta}(t_0^+) = \hat{\theta}_0 - \theta(t_0^+),$$

верна оценка сверху

$$(П.1) \quad \left\| \tilde{\theta}(t) \right\| \leq \beta_{\max} e^{-\gamma_1(t-t_0^+)}, \quad \beta_{\max} > 0,$$

где $\dot{\theta}(t) = \sum_{q=1}^i \Delta_q^\theta \delta(t-t_q^+)$, а $\delta: [t_0^+; \infty) \rightarrow \{0, \infty\}$ – функция Дирака.

Шаг 2. Введем в рассмотрение квадратичную форму

$$(П.2) \quad V_{e_{ref}} = e_{ref}^T P e_{ref} + \frac{a_0^2}{\gamma_1} e^{-2\gamma_1(t-t_0^+)}, \quad H = \text{blockdiag} \left\{ P, \frac{a_0^2}{\gamma_1} \right\},$$

$$\underbrace{\lambda_{\min}(H)}_{\lambda_m} \|\bar{e}_{ref}\|^2 \leq V(\|\bar{e}_{ref}\|) \leq \underbrace{\lambda_{\max}(H)}_{\lambda_M} \|\bar{e}_{ref}\|^2,$$

где $\bar{e}_{ref}(t) = \left[e_{ref}^T(t) \quad e^{-\gamma_1(t-t_0^+)} \right]^T$, $P = P^T > 0$ является решением при $\lambda_{\min}(Q) > 2$ уравнения Ляпунова

$$A_{ref}^T P + P A_{ref} = -Q, \quad Q = Q^T > 0.$$

Производная квадратичной формы (П.2) может быть записана в следующем виде:

$$(П.3) \quad \begin{aligned} \dot{V}_{e_{ref}} &= e_{ref}^T (A_{ref}^T P + P A_{ref}) e_{ref} - 2a_0^2 e^{-2\gamma_1(t-t_0^+)} + \\ &\quad + 2e_{ref}^T P e_n b \tilde{\theta}^T \omega + 2e_{ref}^T P e_n b \delta_{\theta_0}^T \omega = \\ &= -e_{ref}^T Q e_{ref} - 2a_0^2 e^{-2\gamma_1(t-t_0^+)} + \\ &\quad + 2e_{ref}^T P e_n b \tilde{\theta}^T (\omega_{e_{ref}} + \omega_r) + 2e_{ref}^T P e_n b \delta_{\theta_0}^T (\omega_{e_{ref}} + \omega_r) \leq \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|e_{ref}\|^2 - 2a_0^2 e^{-2\gamma_1(t-t_0^+)} + \\ &\quad + 2\lambda_{\max}(P) b_{\max} \|e_{ref}\|^2 \|\tilde{\theta}\| + 2\lambda_{\max}(P) \bar{\omega}_r b_{\max} \|e_{ref}\| \|\tilde{\theta}\| + \\ &\quad + 2\lambda_{\max}(P) b_{\max} \dot{K}_{\max} T \|e_{ref}\|^2 + 2\lambda_{\max}(P) b_{\max} \bar{\omega}_r \dot{K}_{\max} T \|e_{ref}\|, \end{aligned}$$

где

$$\|\omega(t)\| \leq \underbrace{\| [e_{ref}(t) \ 0] \|}_{\|\omega_{e_{ref}}(t)\| = \|e_{ref}(t)\|} + \underbrace{\| [x_{ref}(t) \ r(t)] \|}_{\|\omega_r(t)\| \leq \bar{\omega}_r} \leq \|e_{ref}(t)\| + \bar{\omega}_r.$$

Дважды воспользовавшись неравенством Юнга

$$(II.4) \quad \begin{aligned} 2\lambda_{\max}(P)\bar{\omega}_r b_{\max} \|e_{ref}\| \|\tilde{\theta}\| &\leq \|e_{ref}\|^2 + \lambda_{\max}^2(P)\bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \|\tilde{\theta}\|^2, \\ 2\lambda_{\max}(P)b_{\max}\bar{\omega}_r \dot{\mathcal{K}}_{\max} T \|e_{ref}\| &\leq \lambda_{\max}^2(P)b_{\max}^2 \bar{\omega}_r^2 \dot{\mathcal{K}}_{\max}^2 T^2 + \|e_{ref}\|^2, \end{aligned}$$

можем переписать (II.3) в следующем виде:

$$(II.5) \quad \begin{aligned} \dot{V}_{e_{ref}} &\leq \left[-\lambda_{\min}(Q) + 2\lambda_{\max}(P)b_{\max} \left(\|\tilde{\theta}\| + \dot{\mathcal{K}}_{\max} T \right) + 2 \right] \|e_{ref}\|^2 - \\ &- 2a_0^2 e^{-2\gamma_1(t-t_0^+)} + \lambda_{\max}^2(P)\bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \|\tilde{\theta}\|^2 + \lambda_{\max}^2(P)b_{\max}^2 \bar{\omega}_r^2 \dot{\mathcal{K}}_{\max}^2 T^2. \end{aligned}$$

Поскольку параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$ экспоненциально сходится к нулю (II.2), то при $\lambda_{\min}(Q) > 2$ обязательно найдется момент времени $t_{e_{ref}} \geq t_0^+$ и постоянные $T_{\min} > 0$, $a_0 > \lambda_{\max}(P)\bar{\omega}_r b_{\max} \beta_{\max}$ такие, что для всех $t \geq t_{e_{ref}}$ и $0 < T < T_{\min}$ верно

$$(II.6) \quad \begin{aligned} -\lambda_{\min}(Q) + 2\lambda_{\max}(P)b_{\max} \left(\beta_{\max} e^{-\gamma_1(t_{e_{ref}}-t_0^+)} + \dot{\mathcal{K}}_{\max} T \right) + 2 &= -c_1 < 0, \\ \lambda_{\max}^2(P)\bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \beta_{\max}^2 - 2a_0^2 &= -c_2 < 0. \end{aligned}$$

Тогда оценка сверху на производную (II.5) для всех $t \geq t_{e_{ref}}$ может быть записана в виде

$$(II.7) \quad \dot{V}_{e_{ref}} \leq -\eta_{\bar{e}_{ref}} V_{e_{ref}} + \lambda_{\max}^2(P)b_{\max}^2 \bar{\omega}_r^2 \dot{\mathcal{K}}_{\max}^2 T^2,$$

где

$$\eta_{\bar{e}_{ref}} = \min \left\{ \frac{c_1}{\lambda_{\max}(P)}, \frac{c_2 \gamma_1}{a_0^2} \right\}.$$

Решение дифференциального неравенства (II.7) для всех $t \geq t_{e_{ref}}$ позволяет получить

$$(II.8) \quad V_{e_{ref}}(t) \leq e^{-\eta_{\bar{e}_{ref}}(t-t_{e_{ref}})} V_{e_{ref}}(t_{e_{ref}}) + \frac{\lambda_{\max}^2(P)b_{\max}^2 \bar{\omega}_r^2 \dot{\mathcal{K}}_{\max}^2 T^2}{\eta_{\bar{e}_{ref}}}.$$

Взятие предела по времени от выражения (II.8) и учет определения $V_{e_{ref}}$ позволяет установить существование предела (2.3), что завершает доказательство утверждения.

Доказательство утверждения 2. В силу допущения 2 аналогично (3.2)–(3.3) с помощью формулы Тейлора (1.3) для параметров $\Theta(t)$ запишем следующее:

$$(II.9) \quad \Theta(t) = \Theta(t_i^+) + \dot{\Theta}(t_i^+) (t - t_i^+) + \underbrace{\int_{t_i^+}^t (t - \zeta) \ddot{\Theta}(\zeta) d\zeta}_{\delta_1(t)},$$

где $\Theta(t_i^+) = \Theta_i$, $\dot{\Theta}(t_i^+) = \dot{\Theta}_i$ – значение параметров системы $\Theta(t)$ и скорости их изменения в момент времени t_i^+ , $\|\delta_1(t)\| \leq 0,5\ddot{\Theta}_{\max}T^2$ – ограниченный остаточный член первого порядка ($p = 1$), $\|\delta_0(t)\| \leq \dot{\Theta}_{\max}T$ – ограниченный остаточный член нулевого порядка ($p = 0$).

Запишем (II.9) в матричной форме

$$(II.10) \quad \Theta(t) = \Lambda(t, t_i^+) \vartheta(t) + \delta_1(t),$$

где

$$\vartheta(t) = [\Theta_i^T \quad \dot{\Theta}_i^T]^T \in \mathbb{R}^{2(n+1)}.$$

Подстановка (II.10) в уравнение системы (2.1) позволяет получить

$$(II.11) \quad \dot{x}(t) = A_0x + e_n (\Phi^T(t) \Lambda(t, t_i^+) \vartheta(t) + \Phi^T(t) \delta_1(t)).$$

Продифференцируем $x(t) - l\bar{x}(t)$

$$(II.12) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) - l\dot{\bar{x}}(t) &= -l(x(t) - l\bar{x}(t)) + \\ &+ A_0x + e_n (\Phi^T(t) \Lambda(t, t_i^+) \vartheta(t) + \Phi^T(t) \delta_1(t)). \end{aligned}$$

Решив дифференциальное уравнение (II.12), имеем

$$(II.13) \quad \begin{aligned} x(t) - l\bar{x}(t) &= e^{-l(t-t_i^+)} x(t_i) + A_0\bar{x}(t) + \int_{t_i^+}^t e^{-l(t-\tau)} e_n \Phi^T(\tau) \Lambda(\tau, t_i^+) \vartheta(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{t_i^+}^t e^{-l(t-\tau)} e_n \Phi^T(\tau) \delta_1(\tau) d\tau = \\ &= A_0\bar{x}(t) + e_n \bar{\varphi}(t) \bar{\vartheta}(t) + e_n \underbrace{\int_{t_i^+}^t e^{-l(t-\tau)} \Phi^T(\tau) \delta_1(\tau) d\tau}_{\varepsilon_0(t)}, \end{aligned}$$

где $\bar{\vartheta}(t) = [\vartheta^T(t) \ e_n^T x(t_i^+)]^T \in \mathbb{R}^{2n+3}$, а третье равенство не нарушается, поскольку реинициализация состояний фильтра (4.1) и изменение параметров происходит синхронно в известный момент времени t_i^+ , то есть $\bar{\vartheta}(t) = \text{const}$ для всех $t \in [t_i^+, t_i^+ + T)$.

Подставив (П.13) в (4.2), имеем

$$(П.14) \quad \bar{z}_n(t) = n_s(t) e_n^T [x(t) - l\bar{x}(t) - A_0\bar{x}(t)] = \bar{\varphi}_n^T(t) \bar{\vartheta}(t) + \bar{\varepsilon}_0(t),$$

где $\bar{z}_n(t) \in \mathbb{R}$, $\bar{\varphi}_n(t) \in \mathbb{R}^{2n+3}$ и возмущение $\bar{\varepsilon}_0(t) \in \mathbb{R}$ ограничено следующим образом (см. определения $\Phi(t)$ и $\bar{\varphi}_n(t)$):

$$(П.15) \quad \|\bar{\varepsilon}_0(t)\| = \left\| n_s(t) \int_{t_i^+}^t e^{-l(t-\tau)} \Phi^T(\tau) \delta_1(\tau) d\tau \right\| \leq \|\bar{\varphi}_n^T(t)\| 0,5 \ddot{\Theta}_{\max} T^2.$$

Благодаря домножению на коэффициент $n_s(t)$ в регрессионном уравнении (П.14) регрессор $\bar{\varphi}_n^T(t)$, регрессионная функция $\bar{z}_n(t)$ и возмущение $\bar{\varepsilon}_0(t)$ ограничены. Кроме того, согласно оценке сверху (П.15) возмущение $\bar{\varepsilon}_0(t)$ может быть уменьшено с помощью уменьшения параметра T . Поэтому далее при учете распространения этого возмущения в параметризации будем использовать определение $\bar{\varepsilon}_0(t) := \bar{\varepsilon}_0(t, T)$ и подразумевать, что любое возмущение, полученное обработкой $\bar{\varepsilon}_0(t, T)$, также может быть уменьшено с помощью уменьшения T .

Используя (4.3) и умножив $z(t)$ на $\text{adj}\{\varphi(t)\}$, имеем (коммутативность фильтра (4.3а) не нарушается, поскольку его реинициализация и изменение параметров происходит синхронно в известный момент времени t_i^+ , то есть $\bar{\vartheta}(t) = \text{const}$ для всех $t \in [t_i^+, t_i^+ + T)$)

$$(П.16) \quad \begin{aligned} Y(t) &:= \text{adj}\{\varphi(t)\} z(t) = \Delta(t) \bar{\vartheta}(t) + \bar{\varepsilon}_1(t, T), \\ \text{adj}\{\varphi(t)\} \varphi(t) &= \det\{\varphi(t)\} I_{2(n+1)+1} = \Delta(t) I_{2(n+1)+1}, \\ \bar{\varepsilon}_1(t, T) &= \text{adj}\{\varphi(t)\} \int_{t_i^+}^t e^{-\sigma(\tau-t_i^+)} \bar{\varphi}_n(\tau) \bar{\varepsilon}_0(\tau, T) d\tau, \end{aligned}$$

где $Y(t) \in \mathbb{R}^{2n+3}$, $\Delta(t) \in \mathbb{R}$, $\bar{\varepsilon}_1(t, T) \in \mathbb{R}^{2n+3}$.

В силу $\Delta(t) \in \mathbb{R}$ исключение (4.5) позволяет из (П.16) записать

$$(П.17) \quad \begin{aligned} z_a(t) &= Y^T(t) \mathfrak{L}_a = \Delta(t) \vartheta_a^T(t) + \bar{\varepsilon}_1^T(t, T) \mathfrak{L}_a, \\ z_b(t) &= Y^T(t) \mathfrak{L}_b = \Delta(t) \vartheta_b(t) + \bar{\varepsilon}_1^T(t, T) \mathfrak{L}_b, \end{aligned}$$

где $z_a(t) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $z_b(t) \in \mathbb{R}$, а $\vartheta_a(t)$, $\vartheta_b(t)$ – первые приближения параметров $a(t)$ и $b(t)$ соответственно (составляющие вектора Θ_i).

При выполнении допущения 2, по определению сигнала $\mathcal{K}(t)$ первые приближения $\theta_x(t)$ и $\theta_r(t)$ параметров $k_x(t)$ и $k_r(t)$ соответственно удовлетворяют уравнениям

$$(II.18) \quad a_{ref}^T - \vartheta_a^T(t) = \vartheta_b(t) \theta_x(t), \quad b_{ref} = \vartheta_b(t) \theta_r(t),$$

где $\theta(t) = [\theta_x(t) \quad \theta_r(t)]^T$.

Умножим каждое уравнение из (II.18) на $\Delta(t)$. Подставив в результат умножения уравнения (II.17) и объединив полученные выражения, имеем уравнение (4.6)

$$(II.19) \quad \begin{aligned} \mathcal{Y}(t) &= \mathcal{M}(t) \theta(t) + d(t, T), \\ \mathcal{Y}(t) &:= [\Delta(t) a_{ref}^T - z_a(t) \quad \Delta(t) b_{ref}]^T, \\ \mathcal{M}(t) &:= z_b(t), \\ d(t, T) &:= -[\bar{\varepsilon}_1^T(t, T) \mathfrak{L}_a + \bar{\varepsilon}_1^T(t, T) \mathfrak{L}_b \theta_r(t) \quad \bar{\varepsilon}_1^T(t, T) \mathfrak{L}_b \theta_r(t)]^T, \end{aligned}$$

где $\mathcal{Y}(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathcal{M}(t) \in \mathbb{R}$, $d(t, T) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

С учетом (II.19) для решения уравнения (4.7a) имеет место соотношение

$$(II.20) \quad \begin{aligned} \Upsilon(t) &= \int_{t_0^+}^t e^{t\tau} \int_{\tau}^{\tau} k d\tau \mathcal{M}(\tau) \theta(\tau) d\tau + \int_{t_0^+}^t e^{t\tau} \int_{\tau}^{\tau} k d\tau d(\tau, T) d\tau \pm \Omega(t) \theta(t) = \\ &= \Omega(t) \theta(t) + w(t), \end{aligned}$$

где

$$w(t) = \Upsilon(t) - \Omega(t) \theta(t).$$

Выражение (II.20) завершает доказательство возможности получения уравнения (4.8) с помощью процедур (4.1)–(4.7).

Для доказательства части (а) представим регрессор $\Omega(t)$ в следующем виде:

$$(II.21) \quad \begin{aligned} \Omega(t) &= \Omega_1(t) + \Omega_2(t), \\ \dot{\Omega}_1(t) &= -k(\Omega_1(t) - \Delta(t) \vartheta_b(t)), \quad \Omega_1(t_0^+) = 0, \\ \dot{\Omega}_2(t) &= -k(\Omega_2(t) - \bar{\varepsilon}_1^T(t, T) \mathfrak{L}_b), \quad \Omega_2(t_0^+) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $k > 0$, а возмущение $\bar{\varepsilon}_1(t, T)$ ограничено, то $\Omega_2(t)$ ограничено причем для всех $t \geq t_0^+$ верно неравенство

$$(II.22) \quad |\Omega_2(t)| \leq \Omega_{2\max}(T),$$

а для оценки сверху существует предел $\lim_{T \rightarrow 0} \Omega_{2\max}(T) = 0$, так как величина $\bar{\varepsilon}_1(t, T)$, в соответствии с (II.15)–(II.19), может быть произвольно уменьшена с помощью уменьшения T .

Перейдем к анализу составляющей $\Omega_1(t)$. Запишем для всех $t \in [t_i^+ + T_s, t_{i+1}^+)$ решение первого дифференциального уравнения из (П.21)

$$(П.23) \quad \Omega_1(t) = \phi(t, t_i^+ + T_s) \Omega_1(t_i^+ + T_s) + \int_{t_i^+ + T_s}^t \phi(t, \tau) \Delta(\tau) \vartheta_b(\tau) d\tau,$$

где

$$\phi(t, \tau) = e^{-\int_{\tau}^t k d\tau}.$$

Получим оценки сверху на сигнал $\Omega_1(t)$ на рассматриваемом промежутке. Для этого необходимо оценить $\Delta(t)$, что в свою очередь требует оценки $\varphi(t)$.

Поскольку по условию утверждения $\overline{\varphi}_n \in \text{PE}$ с $T_s < T$, то $\overline{\varphi}_n \in \text{FE}$ на $[t_i^+, t_i^+ + T_s]$ (проверяется подстановкой $t = t_i^+$ в (1.2)). Тогда для всех $t \in [t_i^+ + T_s, t_{i+1}^+)$ верна оценка снизу на регрессор $\varphi(t)$

$$(П.24) \quad \begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{t_i^+}^t e^{-\sigma(\tau - t_i^+)} \overline{\varphi}_n(\tau) \overline{\varphi}_n^T(\tau) d\tau \geq \int_{t_i^+}^{t_i^+ + T_s} e^{-\sigma(\tau - t_i^+)} \overline{\varphi}_n(\tau) \overline{\varphi}_n^T(\tau) d\tau \geq \\ &\geq e^{-\sigma(t_{i+1}^+ - t_i^+)} \int_{t_i^+}^{t_i^+ + T_s} \overline{\varphi}_n(\tau) \overline{\varphi}_n^T(\tau) d\tau \geq \alpha e^{-\sigma(t_{i+1}^+ - t_i^+)} I_{n+1}. \end{aligned}$$

С другой стороны, так как $\|\overline{\varphi}_n(t)\|^2 \leq \overline{\varphi}_n^{\max}$, то существует оценка сверху

$$(П.25) \quad \varphi(t) \leq \overline{\varphi}_n^{\max} \int_{t_i^+}^t e^{-\sigma(\tau - t_i^+)} d\tau \leq \overline{\varphi}_n^{\max} \frac{1 - e^{-\sigma(t - t_i^+)}}{\sigma} \leq \sigma^{-1} \overline{\varphi}_n^{\max},$$

а значит для всех $t \in [t_i^+ + T_s, t_{i+1}^+)$ верно $\Delta_{UB} \geq \Delta(t) \geq \Delta_{LB} > 0$.

Тогда для произведения $\Delta(t) \vartheta_b(t)$, с учетом того, что по допущениям 1 и 2 $b_{\max} \geq |b(t)| \geq b_{\min} > 0$, а $\vartheta_b(t)$ есть первое приближение коэффициента $b(t)$, оказывается верно

$$(П.26) \quad \forall t \in [t_i^+ + T_s, t_{i+1}^+) \quad \Delta_{UB} b_{\max} \geq |\Delta(t) \vartheta_b(t)| \geq \Delta_{LB} b_{\min} > 0.$$

Используя (П.21) и (П.26), учитывая $0 \leq \phi(t, \tau) \leq 1$, имеем оценки на $\Omega_1(t)$

$$(П.27) \quad \begin{aligned} \forall i \geq 1 \quad \forall t \in [t_i^+ + T_s, t_{i+1}^+] \quad \Omega_1(t_i^+ + T_s) + (t_{i+1}^+ - t_i^+ - T_s) \Delta_{UB} b_{\max} \geq \\ \geq \Omega_1(t) \geq \phi(t_{i+1}^+, t_i^+ + T_s) (\Omega_1(t_i^+ + T_s) + (t_{i+1}^+ - t_i^+ - T_s) \Delta_{LB} b_{\min}) > 0, \end{aligned}$$

откуда получим

$$(П.28) \quad \forall t \geq t_0 + T_s \quad \Omega_{1\max} \geq \Omega_1(t) \geq \Omega_{1\min} > 0, \\ \Omega_{1\max} = \min_{\forall i \geq 1} \left\{ \phi(t_{i+1}^+, t_i^+ + T_s) (\Omega_1(t_i^+ + T_s) + (t_{i+1}^+ - t_i^+ - T_s) \Delta_{LB} b_{\min}) \right\}, \\ \Omega_{1\min} = \max_{\forall i \geq 1} \left\{ \Omega_1(t_i^+ + T_s) + (t_{i+1}^+ - t_i^+ - T_s) \Delta_{UB} b_{\max} \right\}.$$

Тогда, с помощью (П.28) и (П.23), можем записать оценку на регрессор $\Omega(t)$

$$(П.29) \quad \forall t \geq t_0 + T_s \quad \Omega_{1\max} + \Omega_{2\max}(T) \geq |\Omega(t)| \geq \Omega_{1\min} - \Omega_{2\max}(T),$$

а значит в силу предельного равенства $\lim_{T \rightarrow 0} \Omega_{2\max}(T) = 0$, найдется $T_{\min} > 0$ такое, что для всех $0 < T < T_{\min}$ и $t \geq t_0 + T_s$ выполняется неравенство

$$(П.30) \quad \Omega_{UB} \geq \Omega(t) \geq \Omega_{LB} > 0,$$

что и требовалось доказать в части (а).

Для доказательства части (б) продифференцируем возмущение $w(t)$ в силу (П.20) и (4.7)

$$(П.31) \quad \dot{w}(t) = \dot{\Upsilon}(t) - \dot{\Omega}(t)\theta(t) - \Omega(t)\dot{\theta}(t) = \\ = -k(\Upsilon(t) - \mathcal{Y}(t)) + k(\Omega(t) - \mathcal{M}(t))\theta(t) - \Omega(t)\dot{\theta}(t) = \\ = -k(\Upsilon(t) - \mathcal{M}(t)\theta(t) - d(t, T)) + k(\Omega(t) - \mathcal{M}(t))\theta(t) - \Omega(t)\dot{\theta}(t) = \\ = -k(\Upsilon(t) - \Omega(t)\theta(t)) - \Omega(t)\dot{\theta}(t) + kd(t, T) = \\ = -kw(t) - \Omega(t)\dot{\theta}(t) + kd(t, T), \quad w(t_0^+) = 0_{n+1}.$$

Решение дифференциального уравнения (П.31) может быть представлено следующим образом:

$$(П.32) \quad w(t) = w_1(t) + w_2(t), \\ \dot{w}_1(t) = -kw_1(t) - \Omega(t)\dot{\theta}(t), \quad w_1(t_0^+) = 0_{n+1}, \\ \dot{w}_2(t) = -kw_2(t) + kd(t, T), \quad w_2(t_0^+) = 0_{n+1}.$$

Для первого дифференциального уравнения из (П.32) в утверждении 2 работы [19] доказано (с точностью до обозначений) выполнение неравенства

$$(П.33) \quad \|w_1(t)\| \leq w_{1\max} \phi(t, t_0^+ + T_s),$$

при $i \leq i_{\max} < \infty$.

Поскольку $k > 0$, а возмущение $d(t, T)$ ограничено, то $w_2(t)$ также ограничено, а следовательно верно неравенство

$$(П.34) \quad \|w_2(t)\| \leq w_{2\max}(T),$$

где предел $\lim_{T \rightarrow 0} w_{2\max}(T) = 0$ справедлив, поскольку вход второго дифференциального уравнения из (П.32) зависит исключительно от величины $d(t, T)$, которая, в свою очередь, в соответствии с (П.15)–(П.19), может быть произвольно уменьшена с помощью уменьшения T . Объединение на основании (П.32) неравенств (П.33) и (П.34) завершает доказательство утверждения.

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы проведем аналогично доказательству утверждения 1.

Шаг 1. Для всех $t \geq t_0^+ + T_s$ решение дифференциального уравнения (4.9) принимает вид

$$(П.35) \quad \begin{aligned} \tilde{\theta}(t) = & \phi(t, t_0^+ + T_s) \tilde{\theta}(t_0^+ + T_s) + \int_{t_0^+ + T_s}^t \phi(t, \tau) \frac{\gamma_1 w(\tau)}{\Omega(\tau)} d\tau - \\ & - \int_{t_0^+ + T_s}^t \phi(t, \tau) \sum_{q=1}^i \Delta_q^\theta \delta(\tau - t_q^+) d\tau, \end{aligned}$$

где

$$\phi(t, \tau) = e^{-\int_{\tau}^t \gamma_1 d\tau}.$$

Тогда, следуя доказательству теоремы 1 из [19], при $i \leq i_{\max} < \infty$ возможно показать следующую ограниченность параметрической ошибки (П.35):

$$(П.36) \quad \begin{aligned} \|\tilde{\theta}(t)\| \leq & \beta_{\max} e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+ - T_0)} + \frac{\gamma_1 w_{1\max}}{\Omega_{LB}} \int_{t_0^+ + T_s}^t \phi(t, \tau) \phi(\tau, t_0^+ + T_s) d\tau + \\ & + \frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} \int_{t_0^+ + T_s}^t \phi(t, \tau) d\tau \leq \\ \leq & \left(\beta_{\max} + \frac{2w_{1\max}}{\Omega_{LB}} \right) e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+ - T_0)} + \frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}}. \end{aligned}$$

Шаг 2. Введем для всех $t \geq t_0^+ + T_s$ в рассмотрение следующую квадратичную форму:

$$(П.37) \quad \begin{aligned} V_{eref} = & e_{eref}^T P e_{eref} + \frac{4a_0^2}{\gamma_1} e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+ - T_s)}, \quad H = \text{blockdiag} \left\{ P, \frac{4a_0^2}{\gamma_1} \right\}, \\ & \underbrace{\lambda_{\min}(H)}_{\lambda_m} \|\bar{e}_{eref}\|^2 \leq V(\|\bar{e}_{eref}\|) \leq \underbrace{\lambda_{\max}(H)}_{\lambda_M} \|\bar{e}_{eref}\|^2, \end{aligned}$$

$$\bar{e}_{eref}(t) = \left[e_{eref}^T(t) \quad e^{-\frac{\gamma_1}{4}(t-t_0^+ - T_s)} \right]^T.$$

Аналогично доказательству утверждения 1 производная (П.37) может быть записана в виде

$$(П.38) \quad \begin{aligned} \dot{V}_{e_{ref}} \leq & \left[-\lambda_{\min}(Q) + 2\lambda_{\max}(P) b_{\max} \left(\|\tilde{\theta}\| + \dot{\mathcal{K}}_{\max} T \right) + 2 \right] \|e_{ref}\|^2 + \\ & + \lambda_{\max}^2(P) \bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \|\tilde{\theta}\|^2 + \lambda_{\max}^2(P) b_{\max}^2 \bar{\omega}_r^2 \dot{\mathcal{K}}_{\max}^2 T^2 - 2a_0^2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+ - T_s)}. \end{aligned}$$

Поскольку параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$ для всех $t \geq t_0^+ + T_s$ удовлетворяет неравенству (П.36), то оценка сверху на (П.38) с учетом

$$\begin{aligned} \|\tilde{\theta}(t)\|^2 \leq & \left(\beta_{\max} + \frac{2w_{1\max}}{\Omega_{LB}} \right)^2 e^{-\gamma_1(t-t_0^+ - T_0)} + \left(\frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} \right)^2 + \\ & + 2 \left(\beta_{\max} + \frac{2w_{1\max}}{\Omega_{LB}} \right) \frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+ - T_0)} \leq \\ \leq & \left(\beta_{\max} + \frac{2w_{1\max}}{\Omega_{LB}} \right) \left(\beta_{\max} + \frac{2(w_{1\max} + \gamma_1 w_{2\max}(T))}{\Omega_{LB}} \right) e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+ - T_0)} + \\ & + \left(\frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} \right)^2 = \bar{\beta}_{\max} e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+ - T_0)} + \left(\frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} \right)^2 \end{aligned}$$

может быть записана в следующем виде:

$$(П.39) \quad \begin{aligned} \dot{V}_{e_{ref}} \leq & \left[-\lambda_{\min}(Q) + 2 + 2\lambda_{\max}(P) b_{\max} \times \right. \\ & \times \left(\left(\beta_{\max} + \frac{2w_{1\max}}{\Omega_{LB}} \right) e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+ - T_s)} + \frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} + \dot{\mathcal{K}}_{\max} T \right) \left. \right] \|e_{ref}\|^2 + \\ & + \lambda_{\max}^2(P) \bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \bar{\beta}_{\max} e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+ - T_s)} + \lambda_{\max}^2(P) \bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \left(\frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} \right)^2 + \\ & + \lambda_{\max}^2(P) \bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \dot{\mathcal{K}}_{\max}^2 T^2 - 2a_0^2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+ - T_s)}. \end{aligned}$$

Обязательно найдется момент времени $t_{e_{ref}} \geq t_0^+ + T_s$ и постоянные $T \rightarrow 0$, $a_0 > \lambda_{\max}(P) \bar{\omega}_r b_{\max} \bar{\beta}_{\max}^{\frac{1}{2}}$, такие что для всех $t \geq t_{e_{ref}}$ верно

$$(П.40) \quad \begin{aligned} -\lambda_{\min}(Q) + 2 + 2\lambda_{\max}(P) b_{\max} \left(\left(\beta_{\max} + \frac{2w_{1\max}}{\Omega_{LB}} \right) e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_{e_{ref}} - t_0^+ - T_s)} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} + \dot{\mathcal{K}}_{\max} T \right) = -c_1 < 0, \\ \lambda_{\max}^2(P) \bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \bar{\beta}_{\max} - 2a_0^2 = -c_2 < 0. \end{aligned}$$

Тогда оценка сверху на производную (П.39) для всех $t \geq t_{eref}$ может быть записана в виде

$$(П.41) \quad \begin{aligned} \dot{V}_{eref} \leq & -\eta_{\bar{e}_{ref}} V_{eref} + \lambda_{\max}^2(P) \bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \left(\frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} \right)^2 + \\ & + \lambda_{\max}^2(P) \bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \dot{\mathcal{K}}_{\max}^2 T^2, \end{aligned}$$

где

$$\eta_{\bar{e}_{ref}} = \min \left\{ \frac{c_1}{\lambda_{\max}(P)}, \frac{c_2 \gamma_1}{4a_0^2} \right\}.$$

Решение дифференциального неравенства (П.7) для всех $t \geq t_{eref}$ позволяет получить

$$(П.42) \quad \begin{aligned} V_{eref}(t) \leq & e^{-\eta_{\bar{e}_{ref}}(t-t_{eref})} V_{eref}(t_{eref}) + \\ & + \frac{1}{\eta_{\bar{e}_{ref}}} \left(\lambda_{\max}^2(P) \bar{\omega}_r^2 b_{\max}^2 \left(\frac{\gamma_1 w_{2\max}(T)}{\Omega_{LB}} \right)^2 + \lambda_{\max}^2(P) b_{\max}^2 \bar{\omega}_r^2 \dot{\mathcal{K}}_{\max}^2 T^2 \right), \end{aligned}$$

что завершает доказательство (ii) части теоремы.

Шаг 3. По доказанному соответственно в (П.36) и (П.42) ошибка $\tilde{\theta}(t)$ ограничена для всех $t \geq t_0^+ + T_s$, а ошибка $e_{ref}(t)$ – для всех $t \geq t_{eref}$. Тогда для доказательства части (i) осталось доказать ограниченность $\tilde{\theta}(t)$ на промежутке $[t_0^+, t_0^+ + T_s)$, а $e_{ref}(t)$ соответственно – на $[t_0^+, t_{eref})$.

В консервативном случае на $[t_0^+, t_0^+ + T_s)$ выполняется неравенство $\Omega(t) \leq \Omega_{LB}$, откуда в силу $\dot{\theta}(t) = 0_{n+1}$ при выполнении допущения 1 следует ограниченность параметрической ошибки $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t_0^+) - \theta(t)$ на $[t_0^+, t_0^+ + T_s)$ и, как следствие, для всех $t \geq t_0^+$.

На промежутке $[t_0^+, t_{eref})$ с учетом обозначений из (П.3), (П.18) уравнение в отклонениях (3.1) может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{ref}(t) = & \left(A_{ref} + e_n b(t) \left(\hat{\theta}_x(t) - k_x(t) \right) \right) e_{ref}(t) + \\ & + e_n b(t) \left(\hat{\theta}^T(t) - \mathcal{K}^T(t) \right) \omega_r(t), \end{aligned}$$

что в силу доказанной ограниченности $\tilde{\theta}(t)$ для всех $t \geq t_0^+$ и выполнении допущений 1 и 2 позволяет с помощью результатов Теоремы 3.2 из [20] сделать вывод об 1) ограниченности $e_{ref}(t)$ на $[t_0^+, t_{eref})$, 2) $\xi(t) \in L_\infty$ для всех $t \geq t_0^+$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Оптимальные псевдоградиентные алгоритмы адаптации // АиТ. 1980. № 8. С. 74–81.
Polyak B.T., Tsypkin Ya.Z. Optimal pseudogradient adaptation algorithms // Autom. Remote Control. 1981. V. 41. P. 1101–1110.

2. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастные псевдоградиентные алгоритмы адаптации // *АиТ.* 1980. № 10. С. 91–97.
Polyak B.T., Tsyypkin Ya.Z. Robust Pseudogradient Adaptation Algorithms // *Autom. Remote Control.* 1981. V. 41. No. 10. P. 1404–1409.
3. *Ioannou P., Sun J.* Robust Adaptive Control. N.Y.: Dover, 2013.
4. *Fradkov A.L.* Lyapunov–Bregman functions for speed-gradient adaptive control of nonlinear time-varying systems // *IFAC-PapersOnLine.* 2022. V. 55. No. 12. P. 544–548.
5. *Goel R., Roy S.B.* Composite adaptive control for time-varying systems with dual adaptation // *arXiv preprint arXiv:2206.01700.* 2022. P. 1–6.
6. *Na J., Xing Y., Costa-Castello R.* Adaptive estimation of time-varying parameters with application to roto-magnet plant // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems.* 2018. V. 51. No. 2. P. 731–741.
7. *Chen K., Astolfi A.* Adaptive control for systems with time-varying parameters // *IEEE Transactions on Automatic Control.* 2020. V. 66. No. 5. P. 1986–2001.
8. *Patil O.S., Sun R., Bhasin S., Dixon W.E.* Adaptive control of time-varying parameter systems with asymptotic tracking // *IEEE Transactions on Automatic Control.* 2022. V. 67. No. 9. P. 4809–4815.
9. *Путов В.В.* Методы построения адаптивных систем управления нелинейными нестационарными динамическими объектами с функционально-параметрической неопределенностью // *Дис. ... д-ра техн. наук, СПбГЭТУ «ЛЭТИ».* СПб., 1993. 590 с.
10. *Путов В.В., Полушин И.Г., Лебедев В.В., Путов А.В.* Обобщение метода мажорирующих функций в задачах адаптивного управления нелинейными динамическими объектами // *Известия СПбГЭТУ ЛЭТИ.* 2013. № 8. С. 32–37.
11. *Глуценко А.И., Ласточкин К.А.* Адаптивное управление с гарантией экспоненциальной устойчивости. Часть III. Объекты с переменными параметрами // *подана в АиТ.*
12. *Pagilla P.R., Zhu Y.* Adaptive control of mechanical systems with time-varying parameters and disturbances // *J. Dyn. Sys., Meas., Control.* 2004. V. 126. No. 3. P. 520–530.
13. *Куюк Д.В., Бобцов А.А., Николаев Н.А., Пыржин А.А.* Стабилизация линейной нестационарной системы в условиях запаздывания и аддитивного синусоидального возмущения выхода // *Известия ВУЗов. Приборостроение.* 2021. Т. 64. № 2. С. 97–103.
14. *Дат В.К., Бобцов А.А.* Управление по выходу линейными нестационарными системами с использованием методов параметрической идентификации // *Мехатроника, автоматизация, управление.* 2020. Т. 21. № 7. С. 387–393.
15. *Григорьев В.В.* Синтез управлений для систем с изменяющимися параметрами // *АиТ.* 1983. № 2. С. 64–70.
Grigoryev V.V. Design of control equations for variable parameter systems // *Autom. Remote Control.* 1983. V. 44. No. 2. P. 189–194.
16. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Robust Time-Varying Parameters Estimation Based on I-DREM Procedure // *IFAC-PapersOnLine.* 2022. V. 55. No. 12. P. 91–96.
17. *Dieudonne J.* Foundations of Modern Analysis, New York, Academic Press, 1960.

18. *Leiva H., Siegmund S.* A necessary algebraic condition for controllability and observability of linear time-varying systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2003. V. 48. No. 12. P. 2229–2232.
19. *Глуценко А.И., Ласточкин К.А.* Адаптивное управление с гарантией экспоненциальной устойчивости. Часть II. Объекты с кусочно-постоянными параметрами // АиТ. 2023. № 3. С. 65–105.
Glushchenko A.I., Lastochkin K.A. Exponentially Stable Adaptive Control. Part II. Switched Systems // Autom. Remote Control. 2023. V. 84. No. 3. P. 260–291.
20. *Khalil H.* Nonlinear Systems, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Шербаковым.

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 12.03.2024

Принята к публикации 20.03.2024